# 317. 點集合論ニ於ケル B. Knaster 氏ノ假設ニ就イテ (I)

近藤基吉 (北大)

W. Sierpinski 氏ハ Fund. Math. ノ第十四巻デ B. Knaster 氏ガ次ノ問題

*Est ce qu'on peut nommer une correspondance qui ferait correspondre à tout ensemble parfait lineaire un de ses points, de sorte qu'aux ensembles différents correspondent des points différents?*

ヲ呈出シタト報ジテ居ル。コノ問題ハ實変數函數論ノ現状デハ到底解カレサウニモナイガ、コノ問題ニ肯定的ナ解決ガ與ヘラレルトスレバ——コノ假設ヲ B. Knaster 氏ノ假義ト呼ブコトニスル——如何ナル集合中函数ガ nommer サレルカト云フ問題ハ必ズシモ困難ナモノデモ無カラウ。夫レノミデハナク此ノ問題ノ解決ハ此頃流行シテ居ル singular set ノ研究ヤ E. Zermelo 氏ノ公理ノ研究ニ一ツノ方向ヲ與ヘルモノデハナイカト思フ、コノ様ナ理由デ最近コノ問題ヲ考ヘテ見タカラ得ラレタ二三ノ結果ヲオ知ラセスル。其

ノタメニ先ヅ定義カラ與ヘテ置カウ。

B. Knaster 氏ノ假設ニ依ツテ一ツノ *fonction d'eusemble* $\varphi(N)$ ガ *nommer* セラレ N ガ任意ノ *eusemble parfait lineaire* ナル時ニ $\varphi(N)$ ハ N ノ一点デアリ、且ツ互ニ相異ナルニツノ *eusemble parfait lineaire* $N_i \ |i=1,2|$ ニ對シテ $\varphi(N_1)\neq\varphi(N_2)$ デアルトスル．然ルトキニ $\varphi(N)$ ニ依ツテ次ノ様ナ集合中函數ガ *nommer* サレル。、

1\. 直線 R 上ニ互ニ *disjoint* ナル $2^{\aleph_0}$ 個ノ集合 $\{E\}$ ヲ定義シテ E ト R−E トガ共ニ *imparfait* デアルヤウニナシ得。

實數 $x$ ニ對シテ

$$F_x = \sum^{(*)} \varphi(N)$$

ヲ考ヘル。コヽニ $\sum^{(*)}$ ハ *borné supérience* ガ $x$ ニ等シイヤウナ *eusemble parfait lineaire* N ニ對シテノ $\varphi(N)$ ノ和ヲ示ス。然ル時ニ $F_x$ ハ *imparfait* デアル．何トナレバ $F_x$ ガ完全集合 P ヲ含ムトキニハ P ノ完全部分集合 Q デ *borné supérience* $<x$ ノモノガアル、Q ニ對シテ $F_x$ ノ定義カラ $\varphi(Q)$ ハ $F_x$ ニ屬シナイ、然ルニ他方ニテ $\varphi(Q)\in Q\subset F_x$ デアル、コレハ互ニ矛盾スル、ソレ故ニ $F_x$ ハ *imparfait* デアル。

次ニ適當ナル區間 I ニ對シテ $I-F_x$ ハ又 *imparfait* デアルコトヲ證明シテ置カウ。若シ任意ノ區間 I ニ對シテ

$I-F_x$ ガ完全集合ヲ含ムナレバ區間

$$\left(-\frac{1}{2n}+x,\ -\frac{1}{2n+1}+x\right) \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ニハ $F_x$ ト素デ且ツ完全ナル部分集合ガ存在スル、ソノ一ツヲ $P_n$ トシ

$$P=(x)+\sum_{n=1}^{\infty}P_n$$

トスレバ $P$ ハ高々一点 $x$ ヲ除イテ $R-F_x$ ニ含マレル完全集合デ且ツソノ *borme supérience* ハ $x$ デアル、ソレ故ニ $\varphi(P)\in F_x$ カテ $x=\varphi(P)$ ガ得ラレル。他方ニテ區間

$$\left(-\frac{1}{2n+1}+x,\ -\frac{1}{2n+2}+x\right) \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ニ含マレ $F_x$ ト素ナル完全集合ノ一ツ $Q_n$ ニ對シテ

$$Q=(x)+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n$$

トオケバ、$P$ ノ場合ト全ク同様ニシテ $x=\varphi(Q)$ ガ得ラレル.ソレ故ニ $\varphi(P)=\varphi(Q)$ デアル.コノコトハ $\varphi(N)$ ノ定義ト矛盾スル、ソレ故ニ區間 $I$ ヲ定義シテ $I-F_x$ 及ビ $I\ F_x$ ガ共ニ *imparfait* デアル様ニナシ得ル、特ニ $I$ トシテ両端ガ有理点カラナルモノヲ選ブコトガ出來ル。

両端ガ有理点カラナル様ナ區間ノ全体カラナル集合ハヨク知ラレタ様ニ *effectivement* = *dénombreble* デアル、ソレ故ニソレ等ヲ *effectivement* ニ一ツノ *suite* *infinie*

$$I_1,\ I_2,\ \cdots\cdots$$

＝列ベルコトガ出來ル、コレ等＝對シテRノ部分集合$T_n$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ヲ次ノ樣＝定義スル、即チ$x\in T_n$ノ時＝$I_n-F_x$及ビ$I_nF_x$ハ共＝*imparfait*デアル樣＝スル、然ルトキ＝ハ$R=\sum_{n=1}^{\infty}T_n$デアルカラ、W. Sierpinski氏ノ定理（W. Sierpinski: *Hypothèse du Continu*, 6頁ヲ見ヨ）＝依ッテ$T_n$ノ中＝ハ*puissance*ガ$2^{\aleph_0}$ノモノガ存在スル、ソノ中デ指數ノ最小ナルモノヲ$T_{n_0}$トスル、然ルトキ＝ハ$x\in T_{n_0}$デアル限リ$I_{n_0}-F_x$及ビ$I_{n_0}F_x$ハ*imparfait*デアル、ソレ故＝$I_{n_0}$ヲR＝*topologiquement*＝變換シテソノ變換＝依ル$I_{n_0}F_x$ノ像$N_x$ヲ考フレバ$\{N_x\}$（$x\in T_{n_0}$）ガ求メル集合デアル。

2. 直線R上＝互＝*disjoint*＝シテ*effectivement*＝$2^{\aleph_0}$個ノ集合$\{N_x\}$（$0\leqq x\leqq 1$）ヲ定義シテ$N_x$ノ*étendue extérieure en mesure*（*massgleiche Hülle*）ガRデアル樣＝ナシ得ル。

任意ノ正數$x$＝對シテ

$$(1)\qquad F_x=\sum_{mes(N)=x}\varphi(N)$$

ト置ク、區間$(0,1)$＝含マレル無理數

$$\nu=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\cdots\cdots+\frac{1|}{|n_k}+\cdots\cdots$$

ニ對シテ

$$E_\nu=\sum_{n=1}^{\infty} F\frac{1}{2^n}x_\nu$$

ヲ考ヘル、但シコンデ

$$x_\nu=\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{2n_1}}+\frac{1}{2^{2n_1+n_2}}+\frac{1}{2^{2n_1+n_2+n_3}}+\cdots\cdots$$

トスル、然ルトキニ $\{E_\nu\}$ ガ求メル集合デアル、先ヅ $\mu\neq\nu$ ノトキニ $E_\mu E_\nu=0$ ヲ證明スル、若シ $p\in E_\mu E_\nu$ ナレバ $p\in F\frac{1}{2^m}x_\mu F\frac{1}{2^n}x_\nu$ ノ成立スル自然數 $m, n$ ガ存在スル、コレ等ニ對シテ $\frac{1}{2^m}x_\mu=\frac{1}{2^n}x_\nu$ ガ成立シ、コレヨリ $x_\mu=x_\nu$ ガ得ラレル、コレハ $\mu\neq\nu$ ト矛盾スル、ソレ故ニ $\mu\neq\nu$ ノ時ニ $E_\mu E_\nu=0$ ガ成立スル、次ニ $E_\mu$ ノ etendue extérience en mesure ガ R デアルコトヲ證明スル、$E_\mu$ ノ etendue extérience en mesure ガ R ト équivalent デナイトスレバ $R-E_\mu$ ノ mesure intérience$>0$ デアルカラ $R-E_\mu$ ハ mesure $>0$ ノ完全集合ヲ含ム、ソノ中ノ一ツヲ P トスル、十分大ナル自然數 $n$ ニ對シテ P ハ mesure $\frac{1}{2^n}x_\mu$ ノ完全集合ヲ含ム、ソノ一ツヲ Q トスレバ $\varphi(Q)\in F\frac{1}{2^n}x_\mu$ デアル、コレハ P ガ $E_\mu$ ト互ニ素ナル事實ニ矛盾スル、ソレ故ニ $E_\mu$ ノ etendue extérience en mesure ハ R デアル。

3. 直線 R 上ニ互ニ素ナル effectivement ニ $2^{\aleph_0}$ 個

ノ集合 $\{N_x\}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ ヲ定義シテ $N_x$ ノ *etendue extérience en catégorie* ガRデアル様ニナシ得ル。

(1) ノ代リニ

$$F_x = \sum_{\delta(N)=x} \varphi(N)$$

ヲ考ヘル、但シ $\delta(N)$ ハNノ *diametre* ヲ示ス、然ルトキニ *proposition* 2ト同様ニシテ *proposition* 3ガ証明セラレル。